

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

I. Fie $A_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde:

$$a_1 = 1 + 2 + \dots + 6; \quad a_2 = 2 + 3 + \dots + 7; \quad a_3 = 3 + 4 + \dots + 8; \quad \dots$$

- a) Determinați a_n .
- b) Arătați că A_{10} nu este pătrat perfect.
- c) Determinați n minim pentru care a_n este pătrat perfect.

II. Studiind monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 + 3x)\sqrt{3} - (3x^2 + 2x)\sqrt{2}$, determinați cel mai mare element al mulțimii $A = \{y \in \mathbb{R} / y = f(n), n \in \mathbb{N}\}$.

III. Pe ipotenuza AB a triunghiului dreptunghic OAB se consideră punctele D și E astfel încât $AD < AE$. Fie F și G proiecțiile ortogonale ale punctelor D și E pe catetele OA și OB . Notăm cu L, M, N, P, R , respectiv mijloacele segmentelor OF, FD, DE, EG, GO .

- a) Arătați că vectorii \overrightarrow{ON} , \overrightarrow{PL} și \overrightarrow{MR} pot forma un triunghi.
- b) Demonstrați că dacă $\overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{AB}$, atunci $AD = BE$.

IV. Se consideră un pătrat de latură 1. Se împarte acest pătrat în nouă pătrate egale și se elimină pătratul din mijloc. Se aplică același procedeu pentru fiecare din pătratele rămase. Notăm cu S_n aria figurii rămase după n pași.

- a) Calculați S_1, S_2, S_3 .
- b) Arătați că $S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nota: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.